

用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数

Analysis on safety factor of slope by strength reduction FEM

赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 王敬林
(后勤工程学院 军事土木工程系, 重庆 400041)

摘要:利用有限单元法,通过强度折减来求边坡稳定安全系数。通过强度折减,使系统达到不稳定状态时,有限元计算将不收敛,此时的折减系数就是安全系数。安全系数的大小与所采用的屈服准则有关,本文对几种常用的屈服准则进行了比较,导出了各种准则互相代换的关系,并采用莫尔-库仑等面积圆屈服准则代替莫尔-库仑准则,算例表明由此求得的边坡稳定安全系数与传统方法的计算结果十分接近。

关键词:边坡安全系数;有限元;屈服准则

中图分类号: TU 432 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2002)03-0343-04

作者简介:赵尚毅(1969-),男,四川洪雅人,后勤工程学院博士生,从事岩土边坡工程的研究。

ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, WANG Jing-lin

(Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China)

Abstract: An analysis on safety factor of slope through c -reduction algorithm by finite elements is presented. When the system reaches instability, the numerical non-convergence occurs simultaneously. The safety factor is then obtained by c -reduction algorithm. The factor is related to the yield criterion. This paper presented a comparison of several yield criterions in common use and deduced the substitutive relationship of them. For convenience the Mohr-Coulomb criterion is replaced by Mohr-Coulomb equivalent area circle criterion, which was proposed by professor Xu Gancheng and Zheng Yingren in 1990. Through a series of case studies, the safety factor of FEM is fairly close to the result of traditional limit equilibrium method. The applicability of the proposed method was clearly exhibited.

Key words: slope safety factor; finite elements; yield criterions

1 引言*

目前,研究边坡稳定性的传统方法主要有:极限平衡法,极限分析法,滑移线场法等。这些建立在极限平衡理论基础上的各种稳定性分析方法没有考虑土体内部的应力应变关系,无法分析边坡破坏的发生和发展过程,没有考虑土体与支挡结构的共同作用及其变形协调,在求安全系数时通常需要假定滑裂面形状为折线、圆弧、对数螺旋线等。而有限单元法不但满足力的平衡条件,而且考虑了材料的应力应变关系,使得计算结果更加精确合理。在有限元法中通过强度折减,使系统达到不稳定状态,有限元计算不收敛,此时的折减系数就是安全系数,这种方法在国外 80 年代就采用,但由于力学概念不十分明确,而且要受到计算程序及计算精度的影响,因而这种方法至今没有在国内流行。随着计算机技术的发展,尤其是岩土材料的非线性弹塑性有限元计算技术的发展,出现了许多适合于岩土材料的大型通用有限元软件,其前、后处理的功能越来越强大,为利用有限元法进行边坡稳定分析创造了条件。本文引用有限元强度折减系数法^[1],通过计算发现求得的安全系数大小与程序采用的屈服准则密切相关,不同的准则得出不同的安全系数。

传统的极限平衡法采用莫尔-库仑准则,但因莫尔-库仑准则的屈服面为不规则的六角形截面的角锥体表面,存在尖顶和棱角,给数值计算带来困难。为与传统方法比较,本文采用了徐干成、郑颖人(1990)提出的莫尔-库仑等面积圆屈服准则代替莫尔-库仑准则^[2],并导出各准则间的换算关系,由此可将求得的安全系数折算成莫尔-库仑等面积圆屈服准则下的安全系数。

2 有限元法进行边坡稳定分析的优点

如果使有限元法保持足够的计算精度,那么有限元法较传统的方法具有如下优点:

- (1) 能够对具有复杂地貌、地质的边坡进行计算。
- (2) 考虑了土体的非线性弹塑性本构关系,以及变形对应力的影响。
- (3) 能够模拟土坡的失稳过程及其滑移面形状。如图 1~4,滑移面大致在水平位移突变的地方及塑性变形发展严重的部位,呈条带状。
- (4) 能够模拟土体与支护的共同作用。
- (5) 求解安全系数时,可以不需要假定滑移面的形状,也无需进行条分。

* 收稿日期:2001-08-09

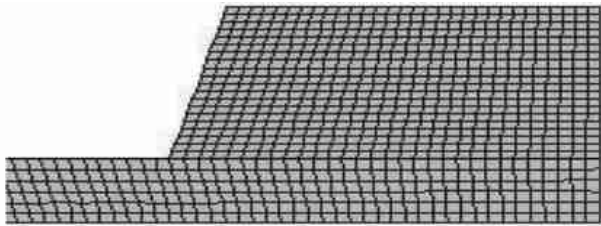


图1 有限元网格划分

Fig.1 Finite element mesh

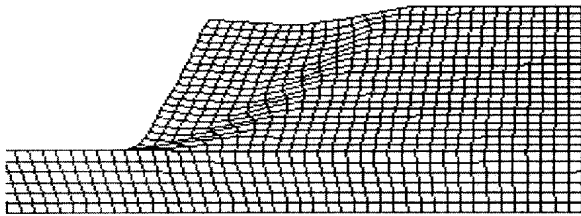


图2 变形后的网格图

Fig.2 Deformed mesh

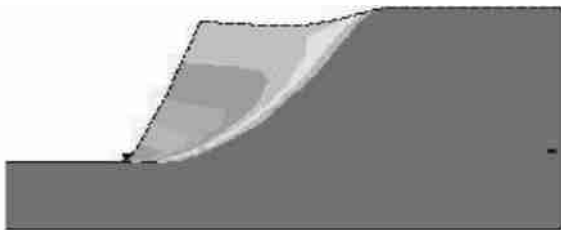


图3 水平方向位移等值线图

Fig.3 Continuous contours of horizontal displacement



图4 变形后的塑性区

Fig.4 Continuous contours of plastic strain

3 常用的屈服准则

本文计算采用的是理想弹塑性模型。目前流行的有限元软件 ANSYS, 以及美国 MSC 公司的 MARC、PATRAN、NASTRAN 均采用了广义米赛斯准则^[3], 在国外被称为德鲁克 - 普拉格准则 (D - P 准则)。

$$F = I_1 + \sqrt{J_2} = k \quad (1)$$

式中 I_1, J_2 分别为应力张量的第一不变量和应力偏张量的第二不变量。

这是一个通用表达式, 通过变换 k 的表达式就可以在有限元中实现不同的屈服准则。 k 是与岩土材料内摩擦角 ϕ 和黏聚力 c 有关的常数。对于不同的圆 (图 5), 有不同的 k 。

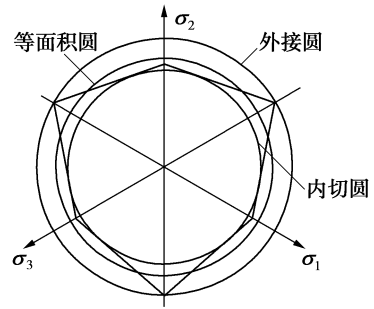


图5 平面上不同 k 的屈服曲线

Fig.5 The yield surface on the deviatoric plane

(1) 当 k 满足下列表达式时

$$k = \left. \begin{aligned} &= \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin^2\phi)} \\ &= \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin^2\phi)} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

屈服面在 $\sigma_1 - \sigma_3$ 平面上为不等角度的六边形的外接圆。

(2) 当 k 满足下列表达式时

$$k = \left. \begin{aligned} &= \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}(3 + \sin^2\phi)} \\ &= \frac{\sqrt{3}c\cos\phi}{\sqrt{3 + \sin^2\phi}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

屈服面在 $\sigma_1 - \sigma_3$ 平面上为不等角度的六边形的内切圆, 在国内特指此圆为 D - P 准则, 用此准则时, 塑性区最大。

(3) 当 k 满足下列表达式时

$$k = \left. \begin{aligned} &= \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos\phi - \sin\phi\sin\phi)} \\ &= \frac{\sqrt{3}c\cos\phi}{\sqrt{3}\cos\phi - \sin\phi\sin\phi} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中

$$= \arcsin \left\{ \left[-\frac{2}{3}A\sin\phi + \left[\frac{4}{9}A^2\sin^2\phi - 4\left(\frac{\sin^2\phi}{3} + 1\right) \cdot \left(\frac{A^2}{3} - 1\right) \right]^{\frac{1}{2}} \right] / \left[2\left(\frac{\sin^2\phi}{3} + 1\right) \right] \right\}, A = \frac{\sqrt{(9 - \sin^2\phi)}}{6\sqrt{3}}$$

这是徐干成、郑颖人 (1990) 提出的莫尔 - 库仑等面积圆屈服准则^[2], 它的面积等于不等角六边形莫尔 - 库仑屈服准则, 它比当前采用的逼近不等角的近似屈服曲线有更高的计算精度。

4 安全系数的定义

上述屈服准则表示为

$$F = -I_1 + \sqrt{J_2} = \frac{k}{S} \quad (5)$$

式中 S 为达到极限状态时的安全系数。

计算时, 首先选取初始折减系数, 折减土体强度参

数,将折减后的参数作为输入,进行有限元计算,若程序收敛,则土体仍处于稳定状态,然后再增加折减系数,直到不收敛为止,此时的折减系数即为边坡的稳定安全系数,此时的滑移面即为实际滑移面,这种方法称为土体强度折减系数法。

传统的边坡稳定极限平衡方法采用莫尔 - 库仑屈服准则,安全系数定义为沿滑动面的抗剪强度与滑动面上实际剪力的比值,用公式表示如下:

$$1 = \frac{\int_0^l (c + \tan \varphi) dl}{\int_0^l \tau dl} \quad (6)$$

将式(6)两边同除以 $\int_0^l \tau dl$,式(6)则变为

$$1 = \frac{\int_0^l (c + \tan \varphi) dl}{\int_0^l \tau dl} = \frac{\int_0^l (c + \tan \varphi) dl}{\int_0^l \tau dl} \quad (7)$$

式中 $c = \frac{c}{F}$; $\tan \varphi = \frac{\tan \varphi}{F}$ 。

式(7)左边等于 1,表明当强度折减以后,坡体达到极限状态。可以看出,有限元强度折减法在本质上与传统方法是一致的。

5 屈服条件的转换

采用不同的屈服条件得到的边坡稳定安全系数是不同的,但这些屈服条件可以互相转换。下面提出如何将按实际所采用的屈服准则求得的安全系数转换成莫尔 - 库仑条件下的安全系数。

以外接圆屈服准则为例,外接圆屈服准则表示为 $\sigma_1 I_1 + \sqrt{J_2} = k_1$,或 $f_1 = \sqrt{J_2} = -\sigma_1 I_1 + k_1$,其中 $\sigma_1 = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}(3 - \sin \alpha)}$, $k_1 = \frac{6 c \cos \alpha}{\sqrt{3}(3 - \sin \alpha)}$ 。

莫尔 - 库仑等面积圆屈服准则表示为 $f_2 = \sqrt{J_2} = -\sigma_2 I_1 + k_2$,其中 $\sigma_2 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha)}$, $k_2 = \frac{\sqrt{3} c \cos \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha}$ 。表达式中的符号含义同前。

因为 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{3 + \sin \alpha}{3 - \sin \alpha} = f(\alpha)$,即 $\sigma_1 = f(\alpha) \sigma_2$, $k_1 = f(\alpha) k_2$, $f_1 = -\sigma_1 I_1 + k_1 = -f(\alpha) \sigma_2 I_1 + f(\alpha) k_2 = f(\alpha) (-\sigma_2 I_1 + k_2)$,则 $\frac{f_1}{f_2} = \frac{(-\sigma_2 I_1 + k_2)}{(-\sigma_2 I_1 + k_2)} = 1$ 。

显然与 $f(\alpha)$ 有关,当给定土体的内摩擦角 α 时,可以计算两种屈服准则的屈服强度的比值,当取不同的值时,可以得到不同的 $f(\alpha)$ 值,见表 1。

求得二准则之间的屈服强度之比 $f(\alpha)$ 后,即能将实际采用准则求得的安全系数换算成莫尔 - 库仑等面积

圆屈服准则条件下的安全系数。

表 1 不同内摩擦角时的 $f(\alpha)$ 值

$\alpha / (^\circ)$	0	10	20	30	40
	1.100	1.165	1.233	1.301	1.367
$\alpha / (^\circ)$	50	60	70	80	90
	1.428	1.480	1.521	1.546	1.555

6 算 例

均质边坡,坡高 $H = 20 \text{ m}$,土容重 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$,黏聚力 $c = 42 \text{ kPa}$,内摩擦角 $\alpha = 17^\circ$,求坡角 β 分别为 $30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$ 时边坡的安全系数。计算结果见表 2。

表 2 安全系数计算结果

Table 2 Safety factor obtained by FEM and traditional limit equilibrium method

坡角 $\beta / (^\circ)$	安全系数		
	有限元法	简化 Bishop 法	Spencer 法
30	1.78	1.47	1.394
35	1.62	1.34	1.259
40	1.48	1.22	1.153
45	1.36	1.12	1.062
50	1.29	1.06	0.992

注: 采用外接圆屈服准则; σ_1 采用莫尔 - 库仑等面积圆屈服准则。

从表中计算结果可以看出,采用外接圆屈服准则计算的安全系数比传统的方法大许多,采用莫尔 - 库仑等面积圆屈服准则计算的结果与传统极限平衡方法 (Spencer 法) 计算的结果十分接近,说明采用莫尔 - 库仑等面积圆屈服准则来代替莫尔 - 库仑不等角六边形屈服准则是可行的,这样使计算大为方便。而采用外接圆屈服准则计算的安全系数要比莫尔 - 库仑等面积圆屈服准则计算的结果大 1 倍。

7 工程应用

某边坡工程位于重庆市奉节县新城区阴里平居住小区东侧进场公路旁边,由于修建公路时开挖而形成,坡度陡,坡高大于 10 m ,坡角大于碎石土的内摩擦角,属不稳定坡体。若遇大暴雨,土体受到雨水浸泡,力学强度降低,该边坡可能发生滑塌,因此必须对其进行支护。根据施工设计,对该边坡进行分级支护,采用锚杆挡墙结构形式。

计算按照平面应变问题处理,土体用平面单元 plane2 模拟,锚杆用梁单元 beam3 单元模拟。网格划分见图 6。计算范围:坡顶侧延伸到 $+380 \text{ m}$ 标高处,坡底向下延伸 20 m ,向公路对面延伸 30 m 。边界条

件:左右两侧水平约束,下部 X 、 Y 方向约束,上部边界为自由边界。屈服准则:采用外接圆屈服准则。输入参数:黏聚力 $c = 10.0$ kPa,内摩擦角 $\varphi = 30^\circ$,泊松比 $\nu = 0.3$,土的饱和容重为 23.0 kN/m³,变形模量 23 MPa;钢筋弹性模量 2.0×10^5 MPa,抗拉强度 310 MPa,泊松比 $\nu = 0.2$ 。

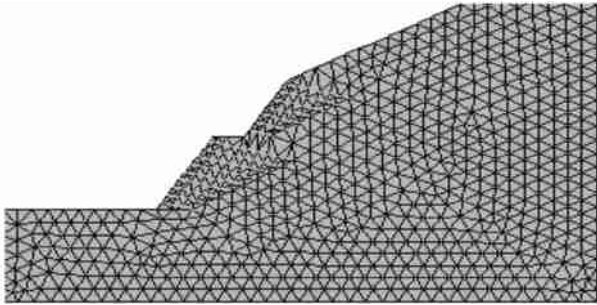


图6 网格划分图

Fig. 6 Finite element mesh

(1)用强度折减系数法进行有限元分析,模型中不加锚杆(将锚杆单元杀死),通过计算得边坡安全系数为 1.1 。坡体达到极限状态时的塑性区变形情况如图7所示。

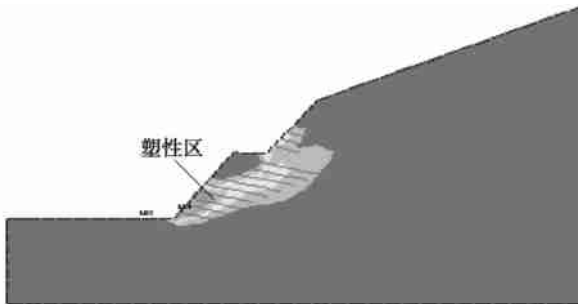


图7 不加锚杆 $\lambda = 1.1$ 时的塑性区

Fig. 7 The plastic strain zone without anchor

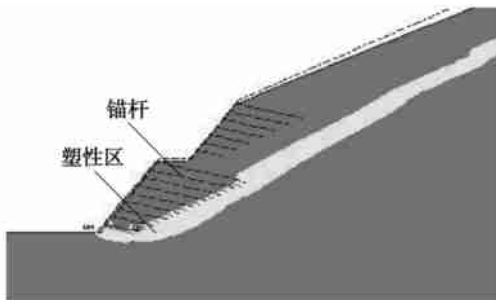


图8 加锚杆 $\lambda = 1.5$ 时的塑性区

Fig. 8 The plastic strain zone with anchor

(2)模型中加上锚杆时,通过计算得安全系数 1.5 ,此时的塑性区变形情况见图8。从图中可以看出滑移面形状是不规则的,加锚杆后的塑性区出现在锚杆加固区的后边缘,滑移面向后移动了。

应当说明,采用有限元强度折减法计算边坡稳定安全系数是可行的,但是应给出对有限元计算精度的要求。同时,应对不同的坡高、坡度以及不同的 c 、 φ 值进行验算,明确强度折减法的误差。

8 结 论

通过以上分析,可以得出如下的结论:

(1)有限单元法不需要作任何假定,计算模型不仅满足力的平衡方程,而且满足土体的应力应变关系,计算结果更可靠。该方法能分析各种复杂形状的边坡,不需假设滑动面,而且能对坡体支护前后进行分析,能够反映土体与支护的共同作用及其变形协调。

(2)有限元法中的强度折减理论,其折减系数本身就是传统意义上的稳定系数,通过强度折减来分析结构的稳定性,直到临界状态为止,此时的折减系数就是所要求的稳定系数,通过分析可以直观地显示出坡体的实际滑动面。

(3)计算模型的建立,包括计算范围、边界条件、网格划分密度等应满足有限元计算的精度要求。如果网格划分太粗,将会造成很大的误差。

(4)所求安全系数的大小与所采用的屈服准则有关。莫尔-库仑屈服准则是目前边坡分析中被广泛采用的屈服准则,但是莫尔-库仑准则的屈服面存在尖顶和棱角,给数值计算带来困难。通过本文计算表明,采用莫尔-库仑等面积圆屈服准则进行计算,不但满足屈服准则的通用表达式 $F = I_1 + \sqrt{J_2} = k$,使有限元数值计算变得方便,而且计算结果与传统的莫尔-库仑屈服准则计算结果比较接近。

参考文献:

- [1] Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387 - 403.
- [2] 徐干成,郑颖人. 岩土工程中屈服准则应用的研究[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(2): 93 - 99.
- [3] 郑颖人,龚晓南. 岩土塑性力学基础[M]. 北京:中国建筑工程工业出版社, 1989.